
Проблем 1. NishTel

Решење: Задатак је еквивалентан следећем: дат је усмерени тежински граф и два истакнута чвора A и B , тако да је сваки чвор достижан из њих. Потребно је обрисати што више грана тако да дужине најкраћих путева од A и B до свих осталих чворова остану исте.

Пустимо Дијкстру из чворова A и B . За сваки чвор v , означимо са $D_A[v]$ и $D_B[v]$, најкраћа растојања од A и B , редом, до чвора v . Грана (u, v) припада неком од најкраћих путева од чвора A до чвора v ако и само ако је $w(u, v) = D_A[v] - D_A[u]$ (*). Аналогно и за чвор B , па све гране за које ниједан од услова није задовољен можемо одмах обрисати.

Обојимо све гране које задовољавају услов (*) у плаво, а оне које задовољавају оговарајући услов за B , у црвено. Плаве гране образују усмерени ациклични граф у коме је само чвор A са улазним степеном 0. Докажимо следеће тврђење:

Дужине свих најкраћих путева од чвора A у новом графу (после брисања неких грана) ће остати исте ако и само ако за сваки чвор $v \neq A$ постоји плава грана (u, v) која није обрисана.

Заиста, уколико за сваки чвор постоји одговарајућа плава грана, кретањем уназад плавим гранама долазимо до чвора A (због ацикличности) а због услова (*) тај пут је најкраћи пут исте дужине као и пре брисања. Обратно, ако важи први део тврђења и постоји чвор $v \neq A$ за који не постоји улазна плава грана, тада на основу (*), најкраћи пут до v је дужи него што је био пре (или уопште не постоји), што је контрадикција. Према томе, тврђење важи.

Аналогно тврђење важи и за црвене гране. Одатле следи, да би обрисали максималан број грана, за сваки чвор $v \neq A$ треба оставити једну плаво-црвену улазну грану, ако постоји, иначе једну плаву и једну црвену улазну грану, а све остале гране обрисати. Заиста, увек посматрамо дисјунктне подскупове грана (према чвору у који улазе), па избори не утичу један на други. Према тврђењу, новодобијени граф задржава најкраће путеве и обрисано је максимално грана.

Сложеност је $O(n^2)$ или $O(m \log n)$ за Дијкстру + $O(n+m)$ за конструкцију плавог и црвеног ацикличног графа и брисање одговарајућих грана.

Рб	n	m	Рб	n	m
01	6	9	11	6000	20.000
02	15	32	12	6000	25.000
03	50	98	13	8000	30.000
04	100	1000	14	8000	40.000
05	100	1000	15	10.000	50.000
06	200	39.800	16	10.000	50.000
07	200	40.000	17	10.000	50.000
08	500	15.000	18	10.000	100.000
09	1000	10.000	19	10.000	100.000
10	1000	10.000	20	10.000	100.000

Вредности улазних параметара за тест примере